2500 V on the second and third electrodes was researched. Here the earth potential is again taken to be zero.

RbCl was used in a thermal ionisation source to provide ions of mass 85 and 87. The spectra were checked on loss in peak height, peak shape and resolving power. To eliminate the influence of retardation in the recorder, optical aberrations in the mass spectrometer and pressure broadening of the peaks, the base and top widths of the peaks were measured at 5% and 95% of the peak height and the peak shape idealized to the theoretical trapezoid.

From it, the virtual collector and source slit widths were calculated. If the first slit is imaged on the fourth slit, a back imaging of the fourth slit on the first one will provide the actual width of the source slit. Any defocusing will increase this value.

Indeed at a constant value of V_3, the virtual source slit width shows a minimum equal to the real source slit width at a certain value of V_2. At the lower values of V_3 this minimum is very broad and almost independent of V_2. This corresponds with the root v_3. At the higher voltages, however, there is a critical relation between V_2 and V_3, the peaks dropping sharply to zero at the one side, and showing a bad shape and loss in height at the other side. This corresponds with the root v_1. A general review of the experimental results is presented in Fig. 5.

Along the latter part of the imaging curve the resolving power can be increased up to 600 and virtual collector slit widths down to 0.15 mm can be realised.

The author is indebted to Prof. Dr. J. Kistemaker for his stimulating interest in this work and thanks Mr. J. A. M. Spitteler and Mr. J. G. van Roon for performing the measurements.

This work is part of the program of research of the Stichting voor Fundamenteel Onderzoek der Materie and has been made possible by financial support from the Nederlandse Organisatie voor Zuiver Wetenschappelijk Onderzoek.

Zur Theorie der Spinoren im Riemannschen Raum

Von Ernst Schmutzer

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut der Universität Jena

(Z. Naturforschg. **15 a**, 355—362 [1960]; eingegangen am 13. Januar 1960)

Die Theorie der Spinoren im Riemannschen Raum von Infeld und van der Waerden wird mit Hilfe der bereits in der projektiven Relativitätstheorie bewährten Methode der Basisvektoren weiterentwickelt. Die spinorielle Geometrie läßt sich in eleganter Weise bis zur Ableitung von grundlegenden Identitäten analog den Bianchi-Identitäten der tensoriellen Geometrie aufbauen. Es ergeben sich mehrere wichtige Beziehungen für den gekrümmten Spinorraum. Während in der üblichen Theorie die Wurzel des elektromagnetischen Feldes im Nichtverschwinden der kovarianten Ableitung des metrischen Spinors gesehen wird, da sich keine andere Interpretationsmöglichkeit zu bieten scheint, kann gezeigt werden, daß auch die wesentlich vereinfachte Geometrie mit verschwindender kovarianter Ableitung des metrischen Spinors zwangsläufig auf einen antisymmetrischen Tensor führt, der dem elektromagnetischen Feld zugeordnet wird.

Seit erkannt wurde, daß zum Aufbau einer Theorie der Elementarteilchen den Spinoren als den gegenüber den Tensoren elementareren Gebilden der Vorzug gegeben werden muß, und außerdem das Problem der Formulierung derartiger Theorien in beliebigen Koordinaten aufgetreten ist, um einer eventuellen Erfassung der Gravitonen Raum zu geben, ist das Interesse für eine elegante Theorie der Spinoren im Riemannschen Raum gestiegen. Bekanntlich wurde die Dirac-Gleichung auf zwei verschiedenen Wegen für die Riemannsche Geometrie verallgemeinert, nämlich von Fock und Iwanenko [1] und von Infeld und van der Waerden [2]. Aus verschiedenen Gründen gibt Verfasser dem Apparat von Infeld und van der Waerden den Vorzug, obwohl der Matrizen-Formalismus relativ häufiger in der Literatur [3] verwendet wird, da jener Apparat den Transformationsmechanismus im Tensor- und Spinorraum sehr klar hervortreten läßt. In mehreren Arbeiten [4] konnte Verfasser zeigen, daß sich die Methode der tensoriellen Basisvektoren zur Formulierung der projektiven Relativitätstheorie gut eignet. Deshalb wird diese Methode auf spinorielle Basisvektoren verallgemeinert, die zur Untersuchung der Geometrie des gekrümmten Spinorraumes verwendet werden sollen.

[1] V. Fock, Z. Phys. **57**, 261 [1929].
[2] L. Infeld u. B. L. van der Waerden, Sitz.-Ber. d. preuß. Akad. d. Wiss., phys.-math. Kl. 1933, S. 380.
[3] P. A. M. Dirac, Max-Planck-Festschrift, Berlin 1958, S. 339. J. G. Fletcher, Nuovo Cim. **8**, 451 [1958]. H. S. Green, Proc. Roy. Soc. (Lond.) Ser. A **245**, 521 [1958].
[4] E. Schmutzer, Z. Phys. **149**, 329 [1957], **154**, 312 [1959]. Wiss. Z. d. Univ. Jena, Jahrg. **8**, 15 [1958/59], math.-nat. Reihe (Zusammenfassung).

Die EINSTEINsche Summenkonvention wird in doppelter Weise angewendet:

1. auf griechische Indizes bezüglich des reellen Tensorraumes,
2. auf große lateinische Indizes bezüglich des 2-dimensionalen komplexen Spinorraumes.

Bei der Betrachtung des 4-dimensionalen Tensorraumes wird die Signatur $+++-$ gewählt. Im übrigen wird auf Formeln bezüglich der Basisvektoren auf die bereits zitierten Arbeiten des Verfassers zurückgegriffen. Im wesentlichen wurde auch die Symbolik daraus entnommen. Insbesondere weisen wir noch einmal darauf hin, daß 1. ein Komma die partielle Ableitung und 2. ein Semikolon die kovariante RIEMANNsche Ableitung charakterisieren. Die komplexe Konjugation wird durch Punktieren der Spinorindizes symbolisiert.

Spinorindizes werden mit dem metrischen Spinor γ_{AB} folgendermaßen bewegt:

$$a_{\mathrm{A}} = \gamma_{\mathrm{BA}}\, a^{\mathrm{B}}, \qquad a^{\mathrm{A}} = \gamma^{\mathrm{AB}}\, a_{\mathrm{B}}, \tag{1}$$

wobei für den metrischen Spinor gilt:

$$\gamma_{\mathrm{AB}}\, \gamma^{\mathrm{CB}} = \gamma_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{C}} = \delta_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{C}}, \qquad \gamma_{\mathrm{AB}} = -\gamma_{\mathrm{BA}} \tag{2}$$

($\delta_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{C}}$ KRONECKER-Symbol).

Außerdem verwenden wir die Bezeichnungen

$$\gamma_{12} = \frac{1}{\gamma^{12}} = \sqrt{\gamma}\, e^{i\,\Theta/2}, \quad \gamma = \gamma_{\dot{1}\dot{2}}\, \gamma_{12}, \quad \Gamma = \ln \sqrt{\gamma}. \tag{3}$$

Tensor- und Spinorkomponenten transformieren sich bei kontinuierlichen Transformationen nach folgendem Schema, wobei im Sinne SCHOUTENS die Transformation durch Striche an den Indizes gekennzeichnet wird:

$$a^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\alpha}\, a^{\alpha}, \qquad a_{\alpha'} = A^{\alpha}_{\alpha'}\, a_{\alpha}, \tag{4}$$

$$a^{\mathrm{A}'} = \Lambda^{\mathrm{A}'}{}_{\mathrm{A}}\, a^{\mathrm{A}}, \quad a_{\mathrm{A}'} = \Lambda_{\mathrm{A}'}{}^{\mathrm{A}}\, a_{\mathrm{A}}. \tag{5}$$

Dabei ist $A^{\alpha}_{\alpha'} = \partial x^{\alpha}/\partial x^{\alpha'}$, und außerdem bestehen die Zusammenhänge

$$\Lambda^{\mathrm{A}'}{}_{\mathrm{C}}\, \Lambda_{\mathrm{A}'}{}^{\mathrm{B}} = \gamma_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{B}}, \qquad \Lambda^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{A}'}\, \Lambda^{\mathrm{A}'}{}_{\mathrm{A}} = \gamma_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}. \tag{6}$$

Man beachte die folgenden Symmetrien:

$$\Lambda^{\mathrm{C}'}{}_{\mathrm{B}} = \Lambda_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{C}'} \equiv \Lambda^{\mathrm{C}'}_{\mathrm{B}}, \qquad \Lambda_{\mathrm{C}'}{}^{\mathrm{B}} = \Lambda^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{C}'} \equiv \Lambda^{\mathrm{B}}_{\mathrm{C}'}. \tag{7}$$

Die Verknüpfung von Tensoren und Spinoren erfolgt mit Hilfe der metrischen Spintensoren $\sigma^{\mu\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}$:

$$a^{\mu} = \tfrac{1}{2}\, \sigma^{\mu\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}\, a_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}, \qquad a_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}} = -\, a^{\mu}\, \sigma_{\mu\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}. \tag{8}$$

Insbesondere ergibt die Anwendung dieser Formeln folgenden Zusammenhang zwischen dem tensoriellen und spinoriellen Koordinatendifferentialen:

$$\mathrm{d}x^{\mu} = \tfrac{1}{2}\, \sigma^{\mu\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}\, \mathrm{d}x_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}, \qquad \mathrm{d}x_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}} = -\,\mathrm{d}x^{\mu}\, \sigma_{\mu\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}. \tag{9}$$

Damit diese Verknüpfung kovarianten Charakter besitzt, müssen sich die metrischen Spintensoren folgendermaßen transformieren:

$$\sigma^{\mu'\dot{\mathrm{C}}'\mathrm{D}'} = A^{\mu'}_{\mu}\, \Lambda^{\dot{\mathrm{C}}'}_{\dot{\mathrm{C}}}\, \Lambda^{\mathrm{D}'}_{\mathrm{D}}\, \sigma^{\mu\dot{\mathrm{C}}\mathrm{D}}. \tag{10}$$

§ 1. Axiomatischer Aufbau der Relationen zwischen den metrischen Spintensoren

Wir können uns dabei von dem von HARISH-CHANDRA [5] durchgeführten Aufbau dieser Relationen für den EUKLIDischen Raum leiten lassen. Zunächst erinnern wir, daß sich aus dem LEVI–CIVITA-Symbol $\delta^{\mu\nu\alpha\beta}$ die LEVI–CIVITAschen Pseudotensoren:

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \sqrt{g}\; \delta^{\mu\nu\alpha\beta}, \qquad \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\, \delta^{\mu\nu\alpha\beta} \tag{11}$$

konstruieren lassen ($g = -|g_{\mu\nu}|$). Für verschiedene Rechnungen werden die beiden wichtigen Beziehungen verwendet:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \varepsilon^{\gamma\delta\varkappa\lambda} = 2\left(g^{\varkappa}_{\beta}\, g^{\lambda}_{\alpha} - g^{\varkappa}_{\alpha}\, g^{\lambda}_{\beta}\right), \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\tau}\, \varepsilon^{\lambda\alpha\beta\tau} = {} & g^{\lambda}_{\mu}\, g^{\alpha}_{\varrho}\, g^{\beta}_{\nu} + g^{\lambda}_{\varrho}\, g^{\alpha}_{\nu}\, g^{\beta}_{\mu} + g^{\lambda}_{\nu}\, g^{\alpha}_{\mu}\, g^{\beta}_{\varrho} - {} \\ & - g^{\lambda}_{\mu}\, g^{\alpha}_{\nu}\, g^{\beta}_{\varrho} - g^{\lambda}_{\varrho}\, g^{\alpha}_{\mu}\, g^{\beta}_{\nu} - g^{\lambda}_{\nu}\, g^{\alpha}_{\varrho}\, g^{\beta}_{\mu}.\end{aligned} \tag{13}$$

Von den metrischen Spintensoren fordern wir als Axiom I HERMITEzität:

$$\sigma^{\mu\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}} = \sigma^{\mu\dot{\mathrm{B}}\mathrm{A}}. \tag{14}$$

Außerdem stellen wir ihr inneres Spinorprodukt durch einen in μ, ν symmetrischen und antisymmetrischen Anteil dar:

$$\sigma_{\mu}{}^{\dot{\mathrm{B}}}{}_{\mathrm{A}}\, \sigma_{\nu\dot{\mathrm{B}}\mathrm{C}} = A g_{\mu\nu}\, \gamma_{\mathrm{AC}} + B\, \varepsilon_{\mu\nu\varrho\tau}\, \sigma^{\varrho\dot{\mathrm{B}}}{}_{\mathrm{A}}\, \sigma^{\tau}{}_{\dot{\mathrm{B}}\mathrm{C}}. \tag{15}$$

Um die DIRAC-Gleichung in möglichst einfacher Gestalt zu bekommen, normieren wir die metrischen Spintensoren so, daß $A = 1$ gesetzt wird. Geht man außerdem mit der linken Seite der Gleichung in die rechte Seite ein, so bestimmt sich B zu:

$$B = \pm i/2, \tag{16}$$

so daß wir als konsistentes Axiom II setzen können:

$$\sigma_{\mu}{}^{\dot{\mathrm{B}}}{}_{\mathrm{A}}\, \sigma_{\nu\dot{\mathrm{B}}\mathrm{C}} = g_{\mu\nu}\, \gamma_{\mathrm{AC}} \pm \frac{i}{2}\, \varepsilon_{\mu\nu\varrho\tau}\, \sigma^{\varrho\dot{\mathrm{B}}}{}_{\mathrm{A}}\, \sigma^{\tau}{}_{\dot{\mathrm{B}}\mathrm{C}}. \tag{17}$$

[5] HARISH CHANDRA, Proc. Ind. Acad. Sci. **23**, 152 [1946]. — E. M. CORSON, Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave Equations, Blackie & Son Ltd., London and Glasgow 1954.

Die beiden Vorzeichen rechts sorgen für die Kovarianz dieses impliziten Axioms, da ja $\varepsilon_{\mu\nu\varrho\tau}$ Pseudotensor ist. Man überzeugt sich auch leicht davon, daß beide Seiten der Gleichung symmetriekonsistent sind, da bei gleichzeitiger Vertauschung $\mu \to \nu$, $A \to C$ beide Seiten antisymmetrisch werden.
Durch Symmetrisierung und Antisymmetrisierung ergibt sich aus (17)

$$\sigma_{\mu}{}^{\dot{\mathrm{B}}}{}_{\mathrm{A}}\, \sigma_{\nu\dot{\mathrm{B}}\mathrm{C}} + \sigma_{\nu}{}^{\dot{\mathrm{B}}}{}_{\mathrm{A}}\, \sigma_{\mu\dot{\mathrm{B}}\mathrm{C}} = 2 g_{\mu\nu}\, \gamma_{\mathrm{AC}} \tag{18}$$

und

$$\sigma_{\mu}{}^{\dot{\mathrm{B}}}{}_{\mathrm{A}}\, \sigma_{\nu\dot{\mathrm{B}}\mathrm{C}} - \sigma_{\nu}{}^{\dot{\mathrm{B}}}{}_{\mathrm{A}}\, \sigma_{\mu\dot{\mathrm{B}}\mathrm{C}} = \pm\, i\, \varepsilon_{\mu\nu\varrho\tau}\, \sigma^{\varrho\dot{\mathrm{B}}}{}_{\mathrm{A}}\, \sigma^{\tau}{}_{\dot{\mathrm{B}}\mathrm{C}}\,. \tag{19}$$

Weiter folgen aus (18) die Beziehungen

$$\sigma_{\mu}{}^{\dot{\mathrm{B}}}{}_{\mathrm{A}}\, \sigma_{\nu\dot{\mathrm{B}}\mathrm{A}} = -\, 2 g_{\mu\nu} \tag{20}$$

und

$$\sigma_{\mu}{}^{\dot{\mathrm{B}}}{}_{\mathrm{A}}\, \sigma^{\mu}{}_{\dot{\mathrm{B}}\mathrm{C}} = 4\, \gamma_{\mathrm{AC}}\,. \tag{21}$$

Durch Multiplikation von (17) mit $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\varkappa}\, \sigma^{\lambda}{}_{\dot{\mathrm{D}}}{}^{\mathrm{C}}$ resultiert:

$$\sigma_{\varkappa\dot{\mathrm{D}}\mathrm{A}} = \pm\, \frac{i}{6}\, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\varkappa}\, \sigma^{\mu}{}_{\dot{\mathrm{D}}}{}^{\mathrm{C}}\, \sigma^{\nu\dot{\mathrm{B}}}{}_{\mathrm{A}}\, \sigma^{\lambda}{}_{\dot{\mathrm{B}}\mathrm{C}}\,. \tag{22}$$

Wendet man auf die rechte Seite dieser Gleichung Formel (17) an, so kommt man auf die wichtige Beziehung:

$$\sigma^{\varrho}{}_{\dot{\mathrm{D}}\mathrm{C}}\, \sigma_{\varrho\dot{\mathrm{B}}\mathrm{A}} = -\, 2\, \gamma_{\dot{\mathrm{D}}\dot{\mathrm{B}}}\, \gamma_{\mathrm{AC}}\,. \tag{23}$$

Einige weitere Umformungen ergeben aus (22):

$$\sigma_{\mu}{}^{\dot{\mathrm{B}}}{}_{\mathrm{A}}\, \sigma_{\nu\dot{\mathrm{B}}\mathrm{C}}\, \sigma_{\lambda\dot{\mathrm{D}}}{}^{\mathrm{C}} = g_{\mu\lambda}\, \sigma_{\nu\dot{\mathrm{D}}\mathrm{A}} - g_{\nu\gamma}\, \sigma_{\mu\dot{\mathrm{D}}\mathrm{A}} - g_{\mu\nu}\, \sigma_{\lambda\dot{\mathrm{D}}\mathrm{A}} \pm i\, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\varkappa}\, \sigma^{\varkappa}{}_{\dot{\mathrm{D}}\mathrm{A}}\,. \tag{24}$$

Daraus wiederum folgt durch Multiplikation mit $\sigma_{\gamma}{}^{\dot{\mathrm{D}}}{}_{\mathrm{F}}$

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu}{}^{\dot{\mathrm{B}}}{}_{\mathrm{A}}\, \sigma_{\nu\dot{\mathrm{B}}\mathrm{C}}\, \sigma_{\lambda\dot{\mathrm{D}}}{}^{\mathrm{C}}\, \sigma_{\gamma}{}^{\dot{\mathrm{D}}}{}_{\mathrm{F}} &= \gamma_{\mathrm{FA}} \left(g_{\mu\lambda}\, g_{\nu\gamma} - g_{\nu\lambda}\, g_{\gamma\mu} - g_{\mu\nu}\, g_{\lambda\gamma}\right) \\ &\quad \pm \frac{i}{2}\, \sigma^{\alpha\dot{\mathrm{D}}}{}_{\mathrm{F}}\, \sigma^{\beta}{}_{\dot{\mathrm{D}}\mathrm{A}} \left[g_{\mu\lambda}\, \varepsilon_{\gamma\nu\alpha\beta} - g_{\nu\lambda}\, \varepsilon_{\gamma\mu\alpha\beta} - g_{\mu\nu}\, \varepsilon_{\gamma\lambda\alpha\beta}\right] \pm i\, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\varkappa}\, \sigma^{\varkappa}{}_{\dot{\mathrm{D}}\mathrm{A}}\, \sigma_{\gamma}{}^{\dot{\mathrm{D}}}{}_{\mathrm{F}}\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Durch Verjüngung resultiert schließlich daraus

$$\sigma_{\mu}{}^{\dot{\mathrm{B}}}{}_{\mathrm{A}}\, \sigma_{\nu\dot{\mathrm{B}}\mathrm{C}}\, \sigma_{\lambda\dot{\mathrm{D}}}{}^{\mathrm{C}}\, \sigma_{\gamma}{}^{\dot{\mathrm{D}}\mathrm{A}} = 2\left(g_{\nu\lambda}\, g_{\gamma\mu} + g_{\mu\nu}\, g_{\gamma\lambda} - g_{\mu\lambda}\, g_{\nu\gamma}\right) \mp 2\, i\, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\gamma}\,. \tag{26}$$

§ 2. Verknüpfung der tensoriellen und spinoriellen Basisvektoren

Den tensoriellen Basisvektoren $\mathfrak{e}_{\mu}$ lassen sich analog zu (8) spinorielle Basisvektoren $\mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}$ zuordnen:

$$\mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}} = -\, \sigma_{\varkappa\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}\, \mathfrak{e}^{\varkappa}\,. \tag{27}$$

Die Umkehrung dieser Gleichung lautet:

$$\mathfrak{e}_{\varkappa} = \frac{1}{2}\, \sigma_{\varkappa}{}^{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}\, \mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}\,. \tag{28}$$

Man erkennt daraus, daß sich die metrischen Spintensoren $\sigma_{\varkappa\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}$ als Skalarprodukte beider Arten von Basisvektoren schreiben lassen:

$$\sigma_{\varkappa\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}} = -\, \mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}\, \mathfrak{e}_{\varkappa}\,, \tag{29}$$

somit die Bedeutung von Projektionskosinus zwischen Tensor- und zugeordnetem Spinorraum besitzen. Die Hermitezität der metrischen Spintensoren führt auf die Beziehung:

$$\mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}} = \mathfrak{e}_{\mathrm{B}\dot{\mathrm{A}}} \tag{30}$$

wenn man formal setzt $(\mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}})^{*} = \mathfrak{e}_{\mathrm{A}\dot{\mathrm{B}}}$ (Stern bedeutet komplexe Konjugation). Damit wird

$$g_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}\dot{\mathrm{C}}\mathrm{D}} = \mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}\, \mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{C}}\mathrm{D}} = \sigma_{\varkappa\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}\, \sigma_{\lambda\dot{\mathrm{C}}\mathrm{D}}\, g^{\varkappa\lambda} = -\, 2\, \gamma_{\dot{\mathrm{A}}\dot{\mathrm{C}}}\, \gamma_{\mathrm{BD}} \tag{31}$$

ein HERMITEsch-symmetrischer Spinor 4. Stufe. Daraus resultiert dann:

$$g_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}{}^{\dot{\mathrm{C}}\mathrm{D}}\, g_{\dot{\mathrm{C}}\mathrm{D}}{}^{\dot{\mathrm{E}}\mathrm{F}} = 4\, \gamma_{\dot{\mathrm{A}}}{}^{\dot{\mathrm{E}}}\, \gamma_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{F}}\,. \tag{32}$$

Für den Bogendifferentialvektor ergibt sich somit:

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{e}_{\mu}\, dx^{\mu} = -\, \frac{1}{2}\, \mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{C}}\mathrm{D}}\, dx^{\dot{\mathrm{C}}\mathrm{D}}\,, \tag{33}$$

und daraus folgt schließlich:

$$(ds)^2 = (d\mathfrak{s})^2 = g_{\mu\nu}\, dx^{\nu}\, dx^{\mu} = \frac{1}{4}\, g_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}\dot{\mathrm{C}}\mathrm{D}}\, dx^{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}\, dx^{\dot{\mathrm{C}}\mathrm{D}}\,. \tag{34}$$

§ 3. Kovariante Ableitung von Spinoren

Die kovariante Ableitung von Spinoren wird mit Hilfe der Übertragungskoeffizienten $\Gamma^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}\lambda}$ folgendermaßen definiert:

$$a_{\mathrm{A};\lambda} = a_{\mathrm{A},\lambda} - \Gamma^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}\lambda}\, a_{\mathrm{B}}\,, \qquad a^{\mathrm{A}}{}_{;\lambda} = a^{\mathrm{A}}{}_{,\lambda} + \Gamma^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\lambda}\, a^{\mathrm{B}}\,. \tag{35}$$

Dadurch wird die Gültigkeit der LEIBNIZschen Produktregel gewährleistet. Für Invarianten J gilt dann insbesondere $J_{;\lambda} = J_{,\lambda}$.
Damit diese kovarianten Ableitungen Spintensoren werden, müssen sich die Übertragungskoeffizienten

wie folgt transformieren:

$$\Gamma^{C'}_{A'\varkappa'} = \Gamma^{C}_{A\varkappa}\,\Lambda^{A}_{A'}\,\Lambda^{C'}_{C}\,A^{\varkappa}_{\varkappa'} + \Lambda^{C}_{A',\varkappa'}\,\Lambda^{C'}_{C}\,. \qquad (36)$$

Für die kovariante Ableitung des gemischten metrischen Spinors resultiert:

$$\gamma_{A}{}^{B}{}_{;\varkappa} = 0\,, \qquad (37)$$

während für die übrigen metrischen Spinoren gilt:

$$\gamma_{AD;\varkappa} = \gamma^{BC}{}_{;\varkappa}\,\gamma_{AB}\,\gamma_{CD}\,, \quad \gamma^{DC}{}_{;\varkappa} = -\,\gamma_{AB;\varkappa}\,\gamma^{BC}\,\gamma^{AD}\,. \qquad (38)$$

Wir notieren schließlich noch die aus der Definition der kovarianten Ableitung folgende bekannte Beziehung:

$$\Gamma^{A}_{A\varkappa} + \Gamma^{\dot A}_{\dot A\varkappa} = (\ln\gamma)_{,\varkappa} - \frac{1}{\gamma}\,\gamma_{;\varkappa}\,. \qquad (39)$$

Die kovariante Ableitung des Spintensors $\sigma^{\varkappa\dot A B}$ wird durch das folgende Axiom III festgelegt:

$$\sigma^{\varkappa\dot A B}{}_{;\lambda} = 0\,. \qquad (40)$$

Mit Hilfe von (27) und (28) ergibt sich dann daraus:

$$e_{\dot C D;\lambda} = 0\,, \qquad e^{\dot A B}{}_{;\lambda} = 0 \qquad (41)$$

und

$$\sigma_{\varkappa\dot A B;\varkappa} = 0\,. \qquad (42)$$

Man beachte dagegen den Zusammenhang:

$$e_{\dot A}{}^{B}{}_{;\varkappa} = \left(e^{\dot C B}\,\gamma_{\dot C\dot A}\right)_{;\varkappa} = e^{\dot C B}\,\gamma_{\dot C\dot A;\varkappa}\,,$$
$$e^{\dot A}{}_{B;\varkappa} = \left(e^{\dot A C}\,\gamma_{CB}\right)_{;\varkappa} = e^{\dot A C}\,\gamma_{CB;\varkappa} \qquad (43)$$

und

$$e_{\dot A}{}^{B}{}_{;\varkappa} = \left(e_{\dot A C}\,\gamma^{BC}\right)_{;\varkappa} = e_{\dot A C}\,\gamma^{BC}{}_{;\varkappa}\,,$$
$$e^{\dot A}{}_{B;\varkappa} = \left(e_{\dot C B}\,\gamma^{\dot A\dot C}\right)_{;\varkappa} = e_{\dot C B}\,\gamma^{\dot A\dot C}{}_{;\varkappa}\,. \qquad (44)$$

Durch Vergleich dieser beiden Gleichungen folgt bei Einführung der Abkürzung:

$$\gamma_{\dot A\dot C;\varkappa}\,\gamma^{\dot A\dot C} = 2\,i\,\Phi_{\varkappa} \qquad (45)$$

das Ergebnis:

$$\gamma_{EB;\varkappa} = -\,i\,\Phi_{\varkappa}\,\gamma_{EB}\,, \qquad \gamma^{EB}{}_{;\varkappa} = i\,\Phi_{\varkappa}\,\gamma^{EB}\,. \qquad (46)$$

Man sieht daraus, daß die Gleichung

$$(e_{\dot E A}\,e_{\dot F B})_{;\varkappa} = -\,2\,(\gamma_{\dot E\dot F}\,\gamma_{AB})_{;\varkappa} = 0 \qquad (47)$$

dadurch von selbst befriedigt wird.

Aus transformationstechnischen Gründen muß $\Phi_{\varkappa}$ Tensorcharakter haben. Daß es sich um einen reellen Tensor handelt, erkennt man, wenn man in (46) mit γ^{EB} multipliziert und zum komplex Konjugierten übergeht.

Für die gemischten spinoriellen Basisvektoren resultiert schließlich:

$$e_{\dot A}{}^{B}{}_{;\varkappa} = i\,e_{\dot A}{}^{B}\,\Phi_{\varkappa}\,, \qquad e^{\dot A}{}_{B;\varkappa} = -\,i\,e^{\dot A}{}_{B}\,\Phi_{\varkappa}\,. \qquad (48)$$

Hätten wir statt (40) die kovariante Ableitung des metrischen Spintensors folgendermaßen eingeführt:

$$\sigma^{\varkappa\dot A B}{}_{;\lambda} = \sigma^{\varkappa\dot A B}\,\theta_{\lambda}\,, \qquad (49)$$

so wären demgegenüber folgende Formeln entstanden:

$$e_{\dot E F;\lambda} = -\,e_{\dot E F}\,\theta_{\lambda}\,, \quad e^{\dot A B}{}_{;\lambda} = e^{\dot A B}\,\theta_{\lambda}\,, \quad \sigma_{\varkappa\dot A B;\lambda} = -\,\sigma_{\varkappa\dot A B}\,\theta_{\lambda}\,, \quad \left(\gamma_{\dot A\dot E}\,\gamma_{BF}\right)_{;\lambda} = -\,2\,\gamma_{\dot A\dot E}\,\gamma_{BF}\,\theta_{\lambda}\,,$$
$$\left(\gamma^{\dot A\dot E}\,\gamma^{BF}\right)_{;\lambda} = 2\,\gamma^{\dot A\dot E}\,\gamma^{BF}\,\theta_{\lambda}\,, \quad \gamma_{FB;\lambda} = -\,\gamma_{FB}\left(\theta_{\lambda} + i\,\Phi_{\lambda}\right), \quad \gamma^{DC}{}_{;\lambda} = \gamma^{DC}\left(\theta_{\lambda} + i\,\Phi_{\lambda}\right). \qquad (50)$$

Wir erkennen aus den letzten beiden Gleichungen das Auftreten des komplexen Tensorfeldes $\Theta_{\lambda} + i\,\Phi_{\lambda}$, das allerdings zu physikalischen Merkwürdigkeiten führt, weshalb wir die Spezialisierung $\Theta_{\lambda} = 0$ vorgenommen haben.

Aus (46) bekommen wir bei Beachtung der Definition der kovarianten Ableitung

$$\gamma_{AB,\varkappa} = \gamma_{CB}\,\Gamma^{C}_{A\varkappa} + \gamma_{AC}\,\Gamma^{C}_{B\varkappa} - i\,\Phi_{\varkappa}\,\gamma_{AB}\,, \quad \gamma^{AB}{}_{,\varkappa} = -\,\gamma^{CB}\,\Gamma^{A}_{C\varkappa} - \gamma^{AC}\,\Gamma^{B}_{C\varkappa} + i\,\Phi_{\varkappa}\,\gamma^{AB}\,, \qquad (51)$$

$$e_{\dot A B,\varkappa} = e_{\dot C B}\,\Gamma^{\dot C}_{\dot A\varkappa} + e_{\dot A C}\,\Gamma^{C}_{B\varkappa}\,, \qquad e^{\dot A B}{}_{,\varkappa} = -\,e^{\dot C B}\,\Gamma^{\dot A}_{\dot C\varkappa} - e^{\dot A C}\,\Gamma^{B}_{C\varkappa}\,. \qquad (52)$$

Die Übertragungskoeffizienten seien folgendermaßen aufgespalten:

$$\Gamma^{B}_{A\lambda} = \left[{B \atop A\lambda}\right] + \frac{i}{2}\,\gamma_{A}{}^{B}\,\Phi_{\lambda}\,, \qquad \Gamma^{A}_{A\lambda} = \left[{A \atop A\lambda}\right] + i\,\Phi_{\lambda}\,. \qquad (53)$$

Definieren wir $[A\varkappa, B] = \gamma_{CB}\left[{C \atop A\varkappa}\right]$, so ergibt sich

$$\gamma_{AB,\varkappa} = [A\varkappa, B] - [B\varkappa, A]\,,$$
$$\gamma^{AB}{}_{,\varkappa} = -\,\gamma^{CB}\left[{A \atop C\varkappa}\right] - \gamma^{AC}\left[{B \atop C\varkappa}\right]. \qquad (54)$$

Gl. (39) schreibt sich damit wie folgt:

$$\left[{A \atop A\varkappa}\right] + \left[{\dot A \atop \dot A\varkappa}\right] = 2\,\Gamma_{,\varkappa}\,. \qquad (55)$$

Außerdem nehmen die partiellen Ableitungen der Basisvektoren die folgende Gestalt an:

$$e_{\dot A B,\varkappa} = e_{\dot C B}\left[{\dot C \atop \dot A\varkappa}\right] + e_{\dot A C}\left[{C \atop B\varkappa}\right], \qquad (56)$$

$$e^{\dot{A}B}{}_{,\varkappa} = -e^{\dot{C}B}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\dot{A}}{\dot{C}\varkappa} - e^{\dot{A}C}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{B}{C\varkappa}, \tag{57}$$

$$e^{\dot{A}}{}_{B,\varkappa} = e^{\dot{A}}{}_{C}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{C}{B\varkappa} - e^{\dot{C}}{}_{B}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\dot{A}}{\dot{C}\varkappa}, \tag{58}$$

$$e_{\dot{A}}{}^{B}{}_{,\varkappa} = e_{\dot{C}}{}^{B}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\dot{C}}{\dot{A}\varkappa} - e_{\dot{A}}{}^{C}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{B}{C\varkappa}. \tag{59}$$

Durch Multiplikation mit Basisvektoren resultiert daraus weiter:

$$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{D}{A\lambda} = -\frac{1}{4}e^{\dot{B}D}e_{\dot{B}A,\lambda} - \frac{1}{2}\gamma_A{}^D\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\dot{B}}{\dot{B}\lambda} \tag{60}$$

und $$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{A}{A\lambda} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{\dot{A}}{\dot{A}\lambda} = -\frac{1}{4}e^{\dot{C}B}e_{\dot{C}B,\lambda} = 2\,\Gamma_{,\lambda}. \tag{61}$$

Die komplexe Größe $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{A}{A\lambda}$ werde folgendermaßen in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{A}{A\lambda} = \Gamma_{,\lambda} + i\,\pi_\lambda. \tag{62}$$

Damit entsteht dann:

$$\Gamma^{D}_{A\lambda} = -\frac{1}{4}e^{\dot{B}D}e_{\dot{B}A,\lambda} + \frac{i}{2}\gamma_A{}^D\left[(\Phi_\lambda + \Pi_\lambda) + i\,\Gamma_{,\lambda}\right]. \tag{63}$$

Führen wir die Abkürzungen:

$$\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{D}{A\lambda} = -\frac{1}{4}e^{\dot{B}D}e_{\dot{B}A,\lambda} \tag{64}$$

und $$\Omega_\lambda = \Phi_\lambda + \Pi_\lambda + i\,\Gamma_{,\lambda} \tag{65}$$

ein, so können wir auch schreiben:

$$\Gamma^{D}_{A\lambda} = \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{D}{A\lambda} + \frac{i}{2}\gamma_A{}^D\,\Omega_\lambda, \tag{66}$$

also auch $$\Gamma^{D}_{D\lambda} - \Gamma^{\dot{D}}_{\dot{D}\lambda} = 2\,i\,(\Phi_\lambda + \Pi_\lambda). \tag{67}$$

Bei Beachtung der Abkürzung (64) gewinnen wir mit Hilfe von (27) den folgenden expliziten Ausdruck für die „gravischen Übertragungskoeffizienten“:

$$\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{D}{A\varkappa} = \frac{1}{4}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\lambda}{\varrho\varkappa}\sigma_{\lambda\dot{B}A}\,\sigma^{\varrho\dot{B}D} - \frac{1}{4}\sigma^{\varrho\dot{B}D}\,\sigma_{\varrho\dot{B}A,\varkappa} \tag{68}$$

sowie $$\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{D}{D\varkappa} = -\frac{1}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\lambda}{\lambda\varkappa} - \frac{1}{4}\sigma^{\varrho\dot{B}D}\,\sigma_{\varrho\dot{B}D,\varkappa}, \tag{69}$$

woraus man die Reellität ersieht:

$$\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\dot{D}}{\dot{D}\lambda} = \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{D}{D\lambda}. \tag{70}$$

Somit erhält (55) die Form:

$$\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{A}{A\varkappa} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\dot{A}}{\dot{A}\varkappa} = 4\,\Gamma_{,\varkappa}. \tag{71}$$

Also wird $$\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{A}{A\varkappa} = 2\,\Gamma_{,\varkappa}. \tag{72}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung folgt dann aus (68):

$$\sigma^{\varrho\dot{B}D}\,\sigma_{\varrho\dot{B}D,\varkappa} = -2\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\lambda}{\lambda\varkappa} - 8\,\Gamma_{,\varkappa}. \tag{73}$$

Schließlich notieren wir noch den aus (40) resultierenden Zusammenhang für die partielle Ableitung des metrischen Spintensors:

$$\sigma^{\varrho\dot{A}B}{}_{,\varkappa} + \sigma^{\alpha\dot{A}B}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\varrho}{\alpha\varkappa} + \sigma^{\varrho\dot{C}B}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\dot{A}}{\dot{C}\varkappa} + \sigma^{\varrho\dot{A}C}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{B}{C\varkappa} - \sigma^{\varrho\dot{A}B}\,\Gamma_{,\varkappa} = 0. \tag{74}$$

Für die Größen $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{A}{B\varkappa}$ gilt dieselbe Transformationsformel wie für die $\Gamma^{A}_{B\varkappa}$, also Beziehung (36). Aus der Transformationsformel der Basisvektoren:

$$e_{\dot{B}'A'} = \Lambda^{\dot{B}}_{\dot{B}'}\,\Lambda^{A}_{A'}\,e_{\dot{B}A} \tag{75}$$

und der Definition (64) gewinnt man nach einiger Rechnung die Transformationsformel für die gravischen Übertragungskoeffizienten:

$$\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{C'}{A'\lambda'} = \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{C}{A\lambda}\Lambda^{A}_{A'}\,\Lambda^{C'}_{C}\,A^{\lambda}_{\lambda'} + \Lambda^{C}_{A',\lambda'}\,\Lambda^{C'}_{C} + \frac{1}{2}\Lambda^{\dot{B}}_{\dot{B}',\lambda'}\,\Lambda^{\dot{B}'}_{\dot{B}}\,\gamma_A{}^C, \tag{76}$$

die sich im letzten Glied von derjenigen (36) unterscheidet. Beachtet man die sich aus den Transformationsbeziehungen

$$\gamma' = \frac{1}{\Lambda\,\Lambda^*}\gamma, \qquad \Gamma' = \Gamma - \ln\sqrt{\Lambda\,\Lambda^*} \tag{77}$$

ergebende Transformationsformel ($\Lambda = |\Lambda^{A'}_{A}|$)

$$\Gamma'_{,\lambda'} = \Gamma_{,\lambda}\,A^{\lambda}_{\lambda'} - \frac{1}{2(\Lambda\,\Lambda^*)}(\Lambda\,\Lambda^*)_{,\lambda'}, \tag{78}$$

so resultiert bei Beachtung der Definition der Π_λ für diese die folgende Transformationsbeziehung:

$$\Pi'_{\lambda'} = \Pi_\lambda\,A^{\lambda}_{\lambda'} + \frac{i}{2}\left(\Lambda^{\dot{C}}_{\dot{A}',\lambda'}\,\Lambda^{\dot{A}'}_{\dot{C}} - \Lambda^{C}_{A',\lambda'}\,\Lambda^{A'}_{C}\right). \tag{79}$$

Man beachte, daß sich im allgemeinen Fall diese Größe nicht tensoriell transformiert. Dennoch ist die daraus gebildete antisymmetrische Größe im Sinne der Bildung des elektromagnetischen Feldtensors aus dem Potential ein echter Tensor.

In diesem Zusammenhang interessiert uns auch das Transformationsverhalten bei Drehungen des Spinorraumes (Phasentransformation)

$$\Lambda^{B'}_{A} = \delta^{B}_{A}\,e^{i\,\varphi/2}. \tag{80}$$

Die Beziehung

$$\gamma_{A'B';\varkappa} = e^{-i\varphi}\left(\gamma_{AB;\varkappa} - i\,\gamma_{AB}\,\varphi_{,\varkappa}\right) \tag{81}$$

leuchtet dabei sofort ein, woraus wiederum nach (46) folgt:

$$\Phi'_{\varkappa} = \Phi_{\varkappa} + \varphi_{,\varkappa}. \tag{82}$$

Andererseits entsteht aus (36) und (76) die Formel

$$\Pi'_\varkappa = \Pi_\varkappa - \varphi_{,\varkappa} . \tag{83}$$

Die Größe $\Pi_\varkappa$ transformiert sich also [vgl. DIRAC-Gleichung (109)] im Unterschied zu $\Phi_\varkappa$ bei Phasentransformation wie das elektromagnetische Potential:

$$A_\varkappa' = A_\varkappa - \frac{\hbar c}{2 e} \varphi_{,\varkappa} .$$

Im Unterschied zu INFELD und VAN DER WAERDEN sehen wir deshalb die $\Pi_\varkappa$ als Repräsentanten des elektromagnetischen Feldes an.

§ 4. Krümmungsspintensor und zyklische Relationen

Aus der Definitionsgleichung des Krümmungsspintensors

$$a_{A;\nu;\varkappa} - a_{A;\varkappa;\nu} = a_{A,\nu,\varkappa} - a_{A,\varkappa,\nu} + a_B P^B{}_{A\nu\varkappa} \tag{84}$$

gewinnt man den konkreten Ausdruck

$$P^B{}_{A\nu\varkappa} = \Gamma^B_{A\varkappa,\nu} - \Gamma^B_{A\nu,\varkappa} + \Gamma^B_{C\nu} \Gamma^C_{A\varkappa} - \Gamma^B_{C\varkappa} \Gamma^C_{A\nu} . \tag{85}$$

Führt man zur Abkürzung den „gravischen Krümmungsspintensor“

$$O^B{}_{A\nu\varkappa} = \left\{ {B \atop A\varkappa} \right\}_{,\nu} - \left\{ {B \atop A\nu} \right\}_{,\varkappa} + \left\{ {B \atop C\nu} \right\} \left\{ {C \atop A\varkappa} \right\} - \left\{ {B \atop C\varkappa} \right\} \left\{ {C \atop A\nu} \right\} \tag{86}$$

sowie die Ausdrücke $\Phi_{\nu\varkappa} = \Phi_{\varkappa,\nu} - \Phi_{\nu,\varkappa}$, $\Pi_{\nu\varkappa} = \Pi_{\varkappa,\nu} - \Pi_{\nu,\varkappa}$, $\Omega_{\nu\varkappa} = \Phi_{\nu\varkappa} + \Pi_{\nu\varkappa}$ (87)

ein, so gelten die Zerlegungen

$$P^B{}_{A\nu\varkappa} = O^B{}_{A\nu\varkappa} + \frac{i}{2} \gamma_A{}^B \Omega_{\nu\varkappa} \quad \text{und} \quad P^A{}_{A\nu\varkappa} = i\, \Omega_{\nu\varkappa} , \quad \text{da} \quad O^A{}_{A\nu\varkappa} = 0 \tag{88, 89, 90}$$

ist. Man beachte weiter, daß aus $\sigma_{\mu\dot{L}M;\nu;\varkappa} - \sigma_{\mu\dot{L}M;\varkappa;\nu} = \sigma_{\alpha\dot{L}M} R^\alpha{}_{\mu\nu\varkappa} + \sigma_{\mu\dot{A}M} P^{\dot{A}}{}_{\dot{L}\nu\varkappa} + \sigma_{\mu\dot{L}A} P^A{}_{M\nu\varkappa} = 0$ (91)

($R^\alpha{}_{\mu\nu\varkappa}$ RIEMANNscher Krümmungstensor) durch Multiplikation mit $\sigma^{\mu\dot{L}B}$ folgt

$$O^B{}_{M\nu\varkappa} = \frac{1}{4} R_{\alpha\mu\nu\varkappa} \sigma^\alpha{}_{\dot{L}M} \sigma^{\mu\dot{L}B} . \tag{92}$$

Hieraus erkennt man die Symmetrie $O_{BM\nu\varkappa} = O_{MB\varkappa\nu}$. (93)

Außerdem ist auf Grund der Definition (84)

$$P_{BA\nu\varkappa} = - P_{BA\varkappa\nu} , \quad O_{BA\nu\varkappa} = - O_{BA\varkappa\nu} . \tag{94}$$

Aus (92) ersieht man, daß $O_{BM\nu\varkappa}$ ein echter Spintensor ist. Somit ist wegen (88) auch $\Pi_{\nu\varkappa}$ ein echter Tensor. Andererseits gewinnt man aus (79) die Transformationsformel

$$\Pi_{\tau'\lambda'} = \Pi_{\tau\lambda} A^\tau_{\tau'} A^\lambda_{\lambda'} + i \left(\Lambda^C_{A',\tau'} \Lambda^{A'}_{C\lambda'} - \Lambda^C_{A',\lambda'} \Lambda^{A'}_{C,\tau'} \right) . \tag{95}$$

Deshalb muß gelten $\Lambda^C_{A',\tau'} \Lambda^{A'}_{C,\lambda'} = \Lambda^C_{A',\lambda'} \Lambda^{A'}_{C,\tau'}$. (96)

Aus (91) gewinnt man durch Multiplikation mit $\sigma^{\beta\dot{L}M}$ die folgende wichtige Verknüpfungsgleichung:

$$R^\beta{}_{\mu\nu\varkappa} = \frac{1}{2} O^{\dot{A}}{}_{\dot{L}\nu\varkappa} \sigma_{\mu\dot{A}M} \sigma^{\beta\dot{L}M} + \frac{1}{2} O^A{}_{M\nu\varkappa} \sigma_{\mu\dot{L}A} \sigma^{\beta\dot{L}M} . \tag{97}$$

Aus (88) und (92) kann man bei Benutzung von (25) die folgende Invariante ausrechnen:

$$P_{BM\nu\varkappa} P^{BM\nu\varkappa} = \frac{1}{4} R_{\gamma\lambda\varrho\varkappa} R^{\gamma\lambda\varrho\varkappa} - \frac{1}{2} \Omega_{\nu\varkappa} \Omega^{\nu\varkappa} \pm \frac{i}{8} R^{\mu\nu}{}_{\varrho\varkappa} R^{\gamma\lambda\varrho\varkappa} \varepsilon_{\mu\nu\gamma\lambda} . \tag{98}$$

Wendet man die Bildungsregel (84) auf die spinoriellen Basisvektoren an (in diesem Fall sind die partiellen Ableitungen von $\mathfrak{e}_{AB}$ nicht mehr vertauschbar), so ergibt sich:

$$\mathfrak{H}_{\dot{A}B\varkappa\nu} = \mathfrak{e}_{\dot{A}B,\varkappa,\nu} - \mathfrak{e}_{\dot{A}B,\nu,\varkappa} = \mathfrak{e}_{\dot{C}B} P^{\dot{C}}{}_{\dot{A}\nu\varkappa} + \mathfrak{e}_{\dot{A}C} P^C{}_{B\nu\varkappa} . \tag{99}$$

Multipliziert man (99) mit $\mathfrak{e}^{\dot{A}D}$ durch, so resultiert

$$P^D{}_{B\nu\varkappa} = \frac{1}{4} \mathfrak{H}_{\dot{A}B\nu\varkappa} \mathfrak{e}^{\dot{A}D} + \frac{i}{2} \Omega_{\nu\varkappa} \gamma_B{}^D . \tag{100}$$

Vergleicht man (100) mit (88), so bekommt man

$$O^{\mathrm{D}}{}_{\mathrm{B}\nu\varkappa} = \frac{1}{4}\, \mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}\nu\varkappa}\, \mathfrak{e}^{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{D}} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}\nu\varkappa} = \mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{A}}}{}^{\mathrm{F}}\, O_{\mathrm{FB}\nu\varkappa} . \tag{101}$$

Daraus erkennt man, daß sich die Vektoren $\mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}\nu\varkappa}$ spintensoriell transformieren. Deshalb können wir die kovariante Ableitung bilden, so daß sich folgende Formel für die zyklische Bildung, symbolisiert durch spitze Klammern, finden läßt:

$$\mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}\langle\nu\sigma;\tau\rangle} = \left[\mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}\nu\sigma,\tau} - \mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{C}}\mathrm{B}\nu\sigma}\left\{{\dot{\mathrm{C}} \atop \dot{\mathrm{A}}\tau}\right\} - \mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{C}\nu\sigma}\left\{{\mathrm{C} \atop \mathrm{B}\tau}\right\} + \Gamma_{,\tau}\,\mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}\nu\sigma}\right]_{\langle\nu\sigma\tau\rangle} . \tag{102}$$

Durch mehrmalige Anwendung von (52) resultiert nach längerer Rechnung das Ergebnis

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B},\nu,\sigma,\tau} - \mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B},\nu,\tau,\sigma} = {} & \mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{D}}\left[\left\{{\mathrm{C} \atop \mathrm{B}\nu}\right\} O^{\mathrm{D}}{}_{\mathrm{C}\tau\sigma} + \Gamma_{,\nu}\, O^{\mathrm{D}}{}_{\mathrm{B}\sigma\tau}\right] \\ & + \mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{F}}\mathrm{B}}\left[\left\{{\dot{\mathrm{C}} \atop \dot{\mathrm{A}}\nu}\right\} O^{\dot{\mathrm{F}}}{}_{\dot{\mathrm{C}}\tau\sigma} + \Gamma_{,\nu}\, O^{\dot{\mathrm{F}}}{}_{\dot{\mathrm{A}}\sigma\tau}\right] + \mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{D}}\mathrm{F}}\left[\left\{{\mathrm{F} \atop \mathrm{B}\nu}\right\} O^{\dot{\mathrm{D}}}{}_{\dot{\mathrm{A}}\tau\sigma} + \left\{{\dot{\mathrm{D}} \atop \dot{\mathrm{A}}\nu}\right\} O^{\mathrm{F}}{}_{\mathrm{B}\sigma\tau}\right] . \end{aligned} \tag{103}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich schreiben

$$\mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}\langle\nu\sigma,\tau\rangle} = -\left[\left\{{\mathrm{C} \atop \mathrm{B}\nu}\right\}\mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{C}\tau\sigma} + \Gamma_{,\nu}\,\mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}\sigma\tau} + \left\{{\dot{\mathrm{C}} \atop \dot{\mathrm{A}}\nu}\right\}\mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{C}}\mathrm{B}\tau\sigma} + \Gamma_{,\nu}\,\mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}\sigma\tau} + \left\{{\mathrm{F} \atop \mathrm{B}\nu}\right\}\mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{F}\tau\sigma} + \left\{{\dot{\mathrm{D}} \atop \dot{\mathrm{A}}\nu}\right\}\mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{D}}\mathrm{B}\tau\sigma}\right]_{\langle\nu\sigma\tau\rangle} , \tag{104}$$

so daß schließlich aus (102)

$$\left[\mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}\nu\sigma;\tau} + \left\{{\mathrm{C} \atop \mathrm{B}\nu}\right\}\mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{C}\tau\sigma} + \left\{{\dot{\mathrm{C}} \atop \dot{\mathrm{A}}\nu}\right\}\mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{C}}\mathrm{B}\tau\sigma} + \Gamma_{,\nu}\,\mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}\sigma\tau}\right]_{\langle\nu\sigma\tau\rangle} = 0 . \tag{105}$$

folgt. Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{1}{4}\,\mathfrak{e}^{\dot{\mathrm{A}}}{}_{\mathrm{D}}$ und beachtet man (101), so ergibt sich

$$\left[O_{\mathrm{DB}\nu\sigma;\tau} + \left\{{\mathrm{C} \atop \mathrm{B}\nu}\right\} O_{\mathrm{DC}\tau\sigma} + i\,\Phi_\tau\, O_{\mathrm{DB}\nu\sigma}\right]_{\langle\nu\sigma\tau\rangle} = 0 \tag{106}$$

oder in anderer Form

$$\left[O^{\mathrm{D}}{}_{\mathrm{B}\nu\sigma;\tau} + \left\{{\mathrm{C} \atop \mathrm{B}\nu}\right\} O^{\mathrm{D}}{}_{\mathrm{C}\tau\sigma}\right]_{\langle\nu\sigma\tau\rangle}\, 0 \tag{107}$$

als Analogon zu den Bianchi-Identitäten der tensoriellen Geometrie. Durch Verjüngung resultiert schließlich daraus:

$$\left[O^{\mathrm{DC}\tau\sigma}\left\{D\nu, C\right\}_{\langle\nu\sigma\tau\rangle} = 0\right] \quad \text{mit} \quad \left\{D\nu, C\right\} = \gamma_{\mathrm{CB}}\left\{{\mathrm{B} \atop \mathrm{D}\nu}\right\} . \tag{108}$$

§ 5. Physikalische Deutung

Das System der Dirac-Gleichungen hat bekanntlich folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}}\,\Psi_{\mathrm{B};\mu} - \frac{i\,m_0\,c}{\hbar}\,\chi^{\dot{\mathrm{A}}} &= 0 , \\ \sigma^{\mu}{}_{\dot{\mathrm{B}}\mathrm{A}}\,\chi^{\dot{\mathrm{B}}}{}_{;\mu} - \frac{i\,m_0\,c}{\hbar}\,\Psi_{\mathrm{A}} &= 0 . \end{aligned} \tag{109}$$

Ausgeschrieben ist dabei

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathrm{B};\mu} = \Psi_{\mathrm{B},\mu} - \Psi_{\mathrm{C}}\left\{{\mathrm{C} \atop \mathrm{B}\mu}\right\} - \frac{i}{2}\,\Psi_{\mathrm{B}}\,\Phi_\mu \\ - \frac{i}{2}\,\Psi_{\mathrm{B}}\Pi_\mu + \frac{1}{2}\,\Psi_{\mathrm{B}}\,\Gamma_{,\mu} . \end{aligned} \tag{110}$$

Aus der Struktur dieser Gleichung erkennt man, daß sowohl Φ_μ als auch Π_μ zum elektromagnetischen Potential in Beziehung gesetzt werden kann. Um die physikalische Identifizierung konkret vorzunehmen, spezialisieren wir unsere Betrachtungen auf einen Euklidischen Raum, wo also gilt:

$$R_{\alpha\mu\nu\varkappa} = 0 , \qquad O_{\mathrm{BM}\nu\varkappa} = 0 , \qquad \mathfrak{H}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}\nu\varkappa} = 0 . \tag{111}$$

Spannen wir insbesondere diesen ungekrümmten Raum sowohl im Tensor- als auch im zugeordneten Spinorraum durch ein konstantes Vektorbein auf:

$$\mathfrak{e}_\mu = \text{const} , \qquad \mathfrak{e}_{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}} = \text{const} , \tag{112}$$

so erhalten wir aus unseren Formeln folgende Spezialisierung:

$$\begin{aligned} & \gamma_{\mathrm{AC}}, \gamma, \Gamma, \sigma^{\mu\dot{\mathrm{A}}\mathrm{B}} = \text{const} , \\ & \Gamma^{\dot{\mathrm{A}}}_{\dot{\mathrm{A}}\varkappa} + \Gamma^{\mathrm{A}}_{\mathrm{A}\varkappa} = 0 , \quad \gamma_{\mathrm{EB};\varkappa} = -\,i\,\gamma_{\mathrm{EB}}\,\Phi_\varkappa \neq 0 , \\ & [\mathrm{A}\varkappa, \mathrm{B}] = [\mathrm{B}\varkappa, \mathrm{A}] , \\ & \left[{\mathrm{A} \atop \mathrm{A}\varkappa}\right] + \left[{\dot{\mathrm{A}} \atop \dot{\mathrm{A}}\varkappa}\right] = 0 , \qquad \left[{\mathrm{D} \atop \mathrm{A}\varkappa}\right] = \frac{i}{2}\,\gamma_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{D}}\,\Pi_\varkappa . \end{aligned} \tag{113}$$

Wir ersehen daraus, daß die Größe $\Pi_\varkappa$ beim Übergang zum ungekrümmten Raum nicht verschwindet. Wir haben also die Möglichkeit vor uns, $\Phi_\varkappa = 0$ zu setzen und $\Pi_\varkappa$ mit dem Viererpotential $A_\varkappa$ zu verknüpfen:

$$A_\varkappa = \frac{\hbar\,c}{2\,e}\,\Pi_\varkappa , \qquad H_{\mu\nu} = \frac{\hbar\,c}{2\,e}\,\Pi_{\mu\nu} . \tag{114}$$

Wir bemerken dabei, daß $\Pi_{\mu\nu}$ ein echter Tensor ist und Π_μ bei Eich-Phasentransformationen richtiges Transformationsverhalten aufweist. Die übliche Behauptung [2], daß die Berücksichtigung des elektromagnetischen Feldes zur Aufgabe des Verschwindens der kovarianten Ableitung des metrischen Spinors zwingt, erscheint uns also als nicht unbedingt stichhaltig.

Abschließend sei noch auf die interessante Struktur der iterierten DIRAC-Gleichung verwiesen: Die Elimination von $\chi^{\dot{A}}$ aus dem DIRAC-System ergibt:

$$\Psi_{C}{}^{;\mu}{}_{;\mu} - \frac{i}{4} \Psi_{B}\, \sigma^{\nu}{}_{\dot{A}C}\, \sigma^{\mu\dot{A}B} \left(\Pi_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{8} \Psi_{D}\, R_{\alpha\beta\mu\nu}\, \sigma^{\nu}{}_{\dot{A}C}\, \sigma^{\mu\dot{A}B}\, \sigma^{\beta\dot{L}}{}_{B}\, \sigma^{\alpha}{}_{\dot{L}}{}^{D} - \frac{m_0{}^2 c^2}{\hbar^2} \Psi_{C} = 0\,. \tag{115}$$

Bei Heranziehung von (25) ergibt sich daraus:

$$\Psi_{C}{}^{;\mu}{}_{;\mu} - \frac{i}{4} \Psi_{B}\, \sigma^{\nu}{}_{\dot{A}C}\, \sigma^{\mu\dot{A}B} \left(\Pi_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{4} R \Psi_{C} - \frac{m_0{}^2 c^2}{\hbar^2} \Psi_{C} = 0\,. \tag{116}$$

Eliminiert man daraus die Krümmungsinvariante R mit Hilfe der EINSTEINschen Feldgleichung und beachtet man, daß für die Spur des Energietensors des DIRAC-Feldes gilt:

$$T = 2\, m_0\, c^2 \left(\Psi_{\dot{B}}\, \chi^{\dot{B}} + \Psi_{B}\, \chi^{B}\right), \tag{117}$$

so bekommt man folgende nichtlineare Gleichung [2]:

$$\Psi_{C}{}^{;\mu}{}_{;\mu} - \frac{i\,e}{2\,\hbar\,c}\, \sigma^{\nu}{}_{\dot{A}C}\, \sigma^{\mu\dot{A}B} H_{\mu\nu} \Psi_{B} - \frac{\varkappa}{2}\, m_0 c^2 \left(\Psi_{\dot{B}}\, \chi^{\dot{B}} + \Psi_{B}\, \chi^{B}\right) \Psi_{C} - \frac{m_0{}^2 c^2}{\hbar^2} \Psi_{C} = 0\,. \tag{118}$$

Das kubische Glied dieser Gleichung ist also durch die Gravitationskonstante $\varkappa$ angekoppelt. Eine gewisse Parallele zur HEISENBERGschen Materiegleichung [6] ist einleuchtend, wenn auch die Nichtlinearität hier erst in der iterierten Gleichung über die Gravitation hereinkommt.

Sehen wir uns schließlich noch einmal die Invariante (98) an, so stellen wir fest, daß, sofern der Realteil zur Konstruktion der LAGRANGE-Funktion für das kombinierte elektromagnetische und gravische Feld brauchbar sein sollte, wir auf folgende LAGRANGE-Funktion geführt werden:

$$\Lambda = \frac{\hbar^2 c^2}{32\, e^2} R_{\lambda\gamma\varrho\varepsilon} R^{\lambda\gamma\varrho\varepsilon} - \frac{1}{4} H_{\nu\varkappa} H^{\nu\varkappa}\,. \tag{119}$$

Untersuchungen über den gravischen Anteil dieser Struktur findet man bei STEPHENSON und HIGGS [7].

[6] H.-P. DÜRR, W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER u. K. YAMAZAKI, Z. Naturforschg. **14 a**, 441 [1959].

[7] G. STEPHENSON, Nuovo Cim. **9**, 263 [1958]. P. W. HIGGS, Nuovo Cim. **11**, 815 [1959].

NOTIZEN

Thermisches Ausbleichen von Farbzentren in KCl

Von K. THOMMEN

Institut für Strahlen- und Kernphysik der Universität Bonn

(Z. Naturforschg. **15 a**, 362—364 [1960]; eingegangen am 5. März 1960)

Die Verfärbung von Alkalihalogenideinkristallen durch ionisierende Strahlen ist vielfach untersucht worden [1]. Neben der F- und M-Bande entsteht eine Reihe weiterer Banden im Ultravioletten, die teilweise nur bei Temperaturen unterhalb Raumtemperatur stabil sind und als V-Banden bezeichnet werden. Sie werden nach der heutigen Auffassung Fehlstellen zugeschrieben, die aus Kationleerstellen bzw. Aggregaten derselben bestehen, in denen Defektelektronen eingefangen sind. Bei Zimmertemperatur sind von den V-Banden nur die V_2-Zentren, bestehend aus zwei assoziierten Kationleerstellen mit zwei eingefangenen Defektelektronen, und die V_3-Zentren, bestehend aus zwei assoziierten Kationleerstellen und einem eingefangenen Defektelektron, stabil. Die V-, F- und M-Banden lassen sich unter geeigneten Bedingungen sowohl thermisch als auch optisch ausbleichen. Nach den bestehenden Vorstellungen über die Natur der F-, M- und V-Zentren sollte dabei ein Ausbleichen der F- (und M-) Zentren gleichzeitig ein Ausbleichen der V-Zentren bewirken, da die beim Zerstören der F- (und M-) Zentren freiwerdenden Elektronen mit den Defektelektronen der V-Zentren rekombinieren sollten. DORENDORF [2] konnte jedoch zeigen, daß es möglich ist, F-Zentren, die durch Bestrahlung mit RÖNTGEN-Strahlen bei

[1] F. SEITZ, Rev. Mod. Phys. **26**, 7 [1954].

[2] H. DORENDORF, Z. Phys. **129**, 317 [1951].